$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ [x\neq 1,\, y\neq -1]}} \underbrace{\frac{(y+1)(x^2-x)}{(x^3-1)(y^2+y)}}_{f(x,y)} =$$

$$= \lim_{\substack{(1,-1)\\ x\neq 1,\ y\neq -1}} \frac{\cancel{(y+1)}\cancel{(x-1)}\cdot \boxed{x}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{\boxed{(x^2+x+1)}}_{>0}\cancel{(y+1)}\cdot \boxed{y}} \overset{\text{spoj. v } (1,-1)}{=} \frac{1}{(1^2+1+1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{3}$$

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x\neq 1}, \underbrace{y\neq 0}, \underbrace{y\neq -1}\} =$$

přímky

$$= \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{x=1\}} \cup \underbrace{\{y=0\}} \cup \underbrace{\{y=-1\}}$$

přímky.

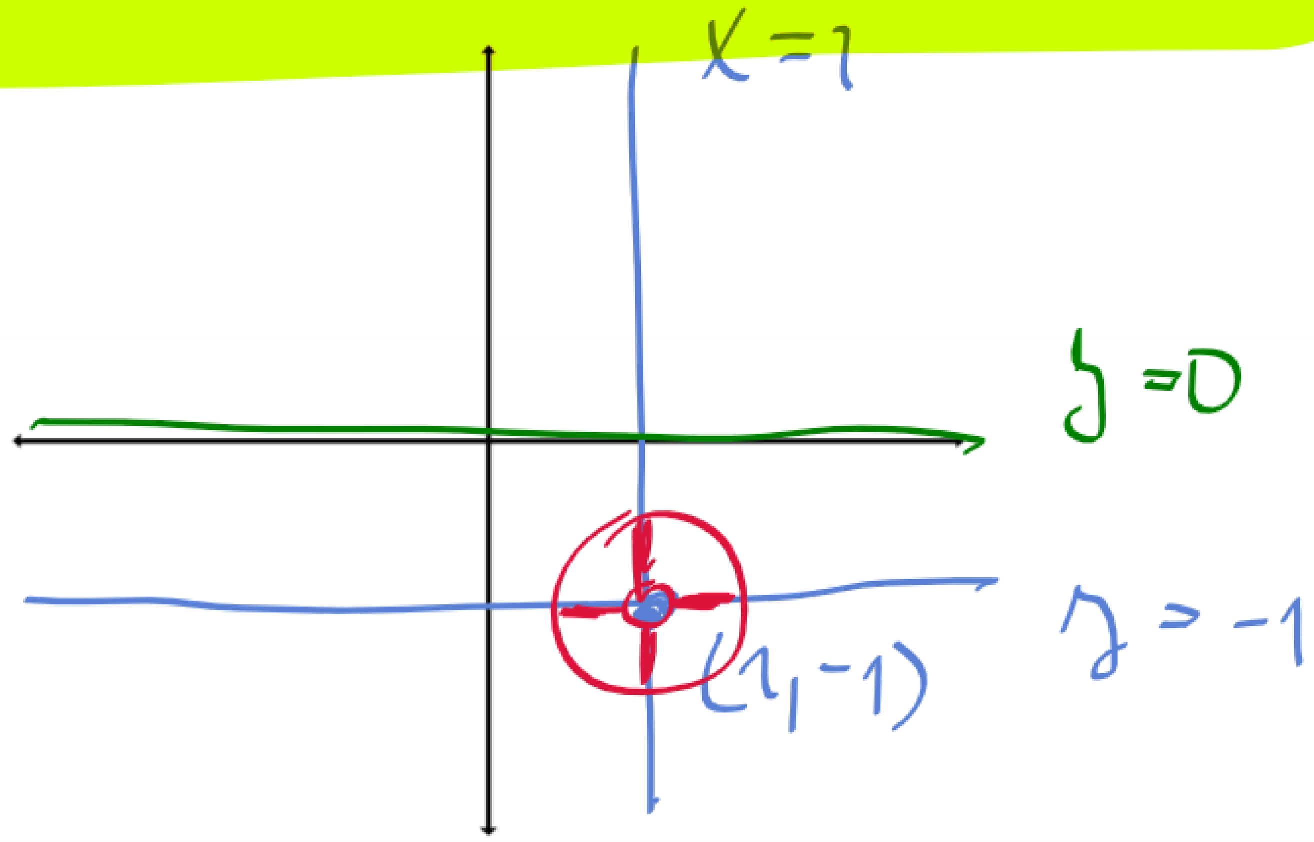
Děláme lim. v bodě, kde se protínají „zakázané přímky".

Tedy funkce f není definována na žádném prstencovém okolí bodu $(1,-1)$.

Tedy lim nemůže existovat vzhl. k $\mathbb{R}^2$.

Má tedy smysl uvažovat pouze limitu vzhledem k D_f. Proto „pod limitou" píšeme $x\neq 1, y\neq -1$.

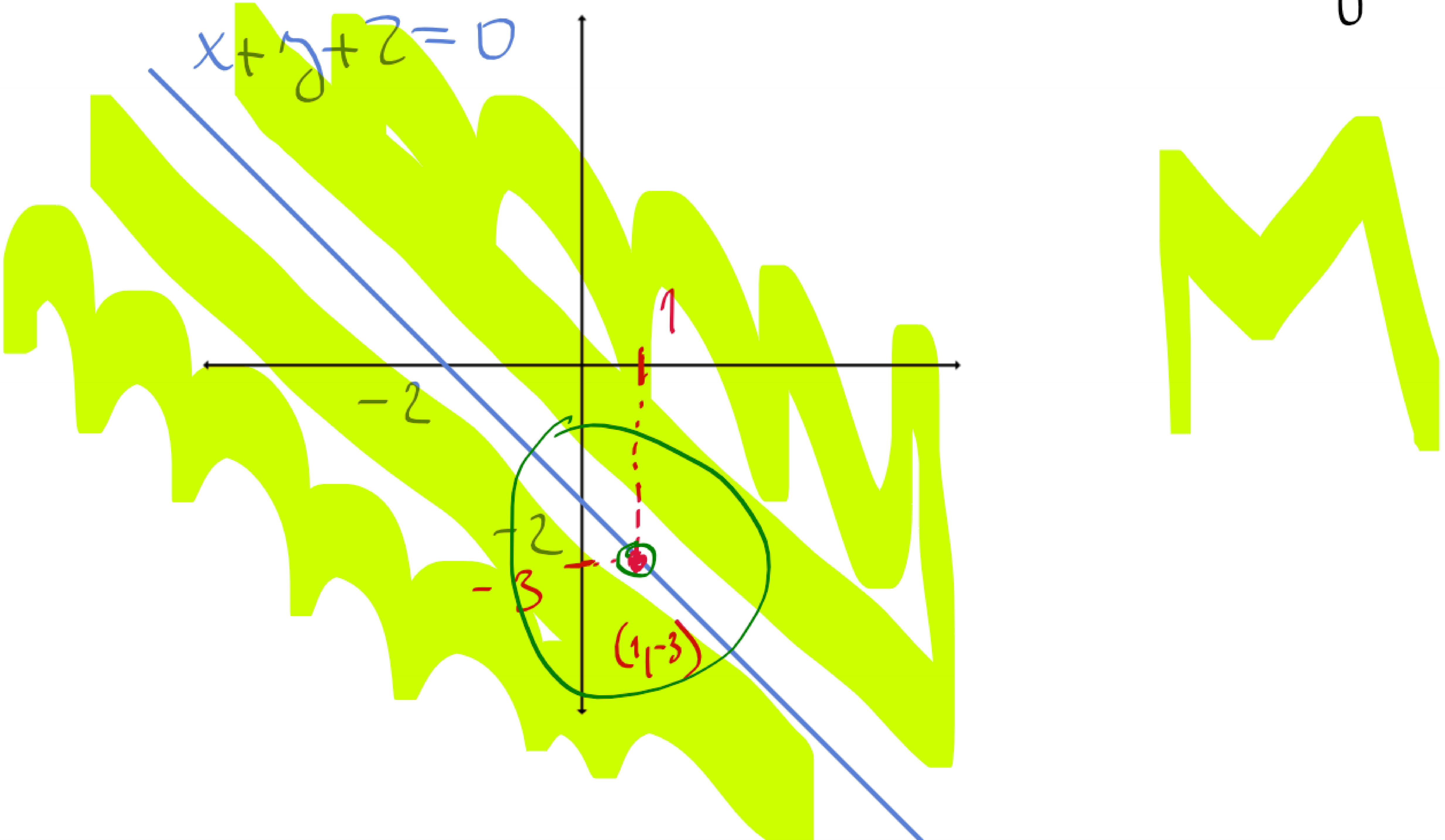
Závěr: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(y+1)(x^2-x)}{(x^3-1)(y^2+y)}$ neexistuje.



$$\lim_{(x,y)\to(1,-3)} \frac{\underbrace{(x+y)^2}_{a^2} - \underbrace{4}_{b^2}}{x+y+2} = \lim \frac{(x+y-2)\cancel{(x+y+2)}}{\cancel{x+y+2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-3)} (x+y-2) = 1-3-2 = -4$$

<u>Pozor</u> funkce není def. na žádném prst. okolí bodu $(1,-3)$, a tedy lim. ve skutečnosti neexistuje.



Proč to vadí?
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ (x,y)\in M}} f(x,y) = A \iff$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y) \in P((a,b),\delta)\cap M$$

$$f(x,y)\in B(A,\varepsilon)$$

speciálně $f(x,y)$ je def.

$\Longrightarrow$ $\exists \delta>0\ \forall (x,y)\in P((a,b),\delta)\cap M$

$f(x,y)$ je definovaná !

<u>Připomeň</u>: 1. sem.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2.$$

8b, c): $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

PO OSÁCH:

$[y=0]$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$[x=0]$: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2} = 0$.

Zdá se tedy, že $\lim = 0$.
Pokud ex., je jistě rovna 0.

Zkuste: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

dosadit $\varphi(t) = (t,t)$.

$\lim f(\varphi(t)) = ?$

$\lim\limits_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) =$

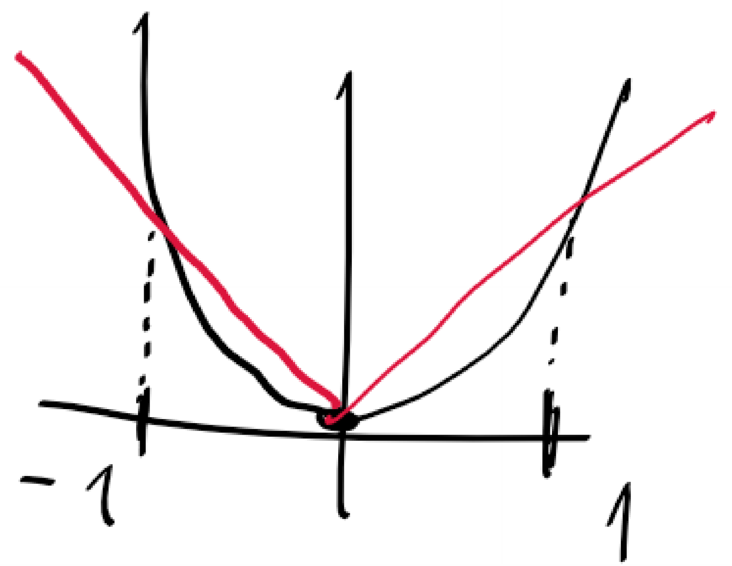
$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{2t\cdot t}{t^2+t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2t^2}{2t^2} = 1$.

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ... neexistuje.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Pozn.: x^2+y^2 vs $\sqrt{x^2+y^2}$

Graf $\sqrt{x^2+y^2}$: $[y=0]$ $\sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$



PO OSÁCH: $[y=0]$: $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}} = 0$

Podobně osa y.

$[y = \alpha \cdot x]$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \alpha x}{\sqrt{x^2+\alpha^2 x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \cdot x^2}{\sqrt{x^2(1+\alpha^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\cdot x^2}{|x|\cdot(1+\alpha^2)^{1/2}} = \alpha \cdot \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{1+\alpha^2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \lim |x| = \underline{\underline{0}}.$$

---

nulová limita po všech přímkách

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pozorování: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

$\Rightarrow |x^2+y^2| \geq 2|xy| \geq |xy|$

$\Rightarrow \boxed{2|xy| \leq x^2+y^2}$

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$

VOLSF $g(z) = \sqrt{z}$, $h(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$, $h \to 0$.

Tedy podle LOZP:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Tedy i $f(x,y) \to 0$

Alternativně pomocí POL. SOUŘADNIC

Heuristický výpočet!

$x = r \cdot \cos\alpha$
$y = r \cdot \sin\alpha$

$r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{r^2 \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}} = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{r} =: \tilde{f}(r,\alpha)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0_+} \tilde{f}(r,\alpha) = \lim_{r\to 0_+} \frac{r^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{r} = \lim_{r\to 0_+} r \cdot \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\text{omezená}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{0}}$$

nulová × omezená

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ $\qquad g(r,\alpha) = r$

POLÁRNÍ SOUŘADNICE: r = vzdálenost od $(0,0)$.

9f) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = 1$

$g(w) = \left(1+\frac{2}{w}\right)^{w}$ $\lim_{w\to 0} g(w) = ? = 1$

$h(x,y,z) = |x|+|y|+|z|$, $\lim_{(0,0,0)} h = 0$

(P): $h(x,y,z)=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$

δ může dle libosti.

$\lim_{w\to 0} g(w) = \lim \left(1+\frac{2}{w}\right)^{w} =$

$= \lim e^{w \ln\left(1+\frac{2}{w}\right)} = e^{0} = 1$

$\lim_{w\to 0_+} w \ln\left(1+\frac{2}{w}\right) =$

$= \lim_{w\to 0_+} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{w}\right)}{\frac{1}{w}} \overset{l'H}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{w\to 0_+} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{w}} \cdot \frac{-2}{\cancel{w^2}}}{\frac{-1}{\cancel{w^2}}}$

$= +2 \cdot \lim_{w\to 0_+} \frac{1}{1+\frac{2}{w}} = 2 \cdot \frac{1}{1+\infty} = 0.$